Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 5 - Correction

Exercices

Exercice 1 Une pompe installée sur une conduite aspire de l'eau à la base d'un réservoir (hauteur d'eau $h = 2$ m) pour la refouler dans un bassin à l'air libre dont la surface libre est située à une hauteur de $h_{tot} = 10$ m par rapport au fond du reservoir. Le débit de la pompe est de 50 l/s. Calculer la puissance de cette pompe

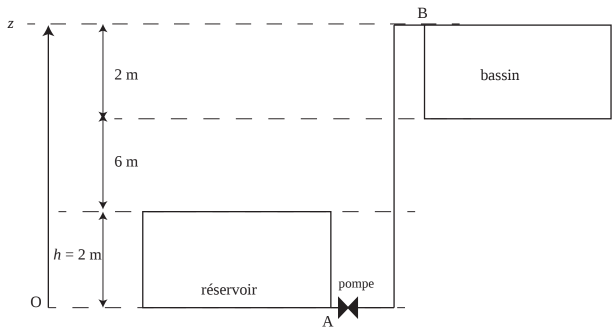

Figure 1 – Schéma du système hydraulique de pompage

Exercice 2 Quelle est la pression qui s'exerce sur le nez d'une torpille se déplaçant sous 10 m d'eau à la vitesse $v = 50$ km/h ?

Exercice 3 Une conduite circulaire de rayon R transporte un fluide de masse volumique ρ avec un débit Q. Tout d'abord horizontale, la conduite subit une inflexion d'un angle α. Calculer la force subie par le coude en considérant un volume de contrôle englobant ce coude. On négligera la gravité.

Exercice 4 Un jet circulaire de rayon a projette horizontalement un fluide de masse volumique ρ sur un mur vertical avec une vitesse v. Calculer la force d'impact du jet.

Exercice 5 Vous travaillez pour Ingénieurs du Monde dans une vallée reculée des montagnes du Népal. Vous devez estimer la vitesse d'écoulement de l'eau dans une rivière d'une petite vallée située à 5 jours de marche de la route la plus proche avec les moyens rudimentaires à disposition sur place (un récipient et un long tuyau). Connaissant le volume V du récipient et le temps t nécessaire pour le remplir, déterminer la vitesse v de l'eau dans la rivière. Vous connaissez encore le diamètre du tuyau d, sa longueur l, la pression atmosphérique P_a, la pente de la rivière p. Les autres mesures déjà prises sont indiquées sur la figure 2.

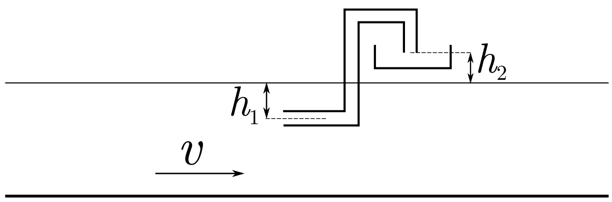

FIGURE 2 – Schéma de l'installation rudimentaire de mesure.

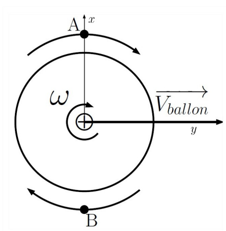

FIGURE 3 – L'effet Magnus

Exercice 6 En 1997, Roberto CARLOS marqua un but d'anthologie face à la France à faire pâlir les goals (voir si possible la vidéo sur internet). Il utilisa pour cela un effet bien connu qui est l'**effet Magnus**. Cet effet permet, en outre, de donner l'effet lifté ou coupé à une balle de ping pong ou de tennis. Nous allons essayer de comprendre cet effet dans cet exercice. Soit un ballon de rayon a, de masse m et de vitesse v_{ballon}. Pendant sa course le ballon tourne sur lui même à la vitesse angulaire ω.

1. On suppose que la rotation du ballon entraine le fluide autour de lui. Déterminez dans le référentiel du terrain, puis dans le référentiel du ballon, la vitesse du fluide au point A et au point B (ces points

étant très proches on pourra considérer qu'ils sont sur la surface du ballon).

2. A l'aide du théorème de Bernoulli déterminez la différence de pression entre A et B.
3. En supposant que la pression A est homogène sur la demi-sphère supérieure et la pression B homogène sur la demi-sphère inférieure, déterminez la force résultante sur la ballon. Cette force est à l'origine de l'effet Magnus.
4. En s'aidant du schéma ci-dessous trouver le rayon de courbure R de la frappe que l'on considère constant. On négligera touts frottements et on traitera le problème dans le plan horizontal (on ne prend pas en compte le déplacement vertical du ballon). *Aide : la force centrifuge ($F_c = m\omega^2 R$) doit être égale à la force de Magnus pour maintenir un rayon constant.*
5. Considérons que Roberto Carlos a tiré le ballon de foot (de rayon a = 11 cm et de masse m = 450 g) dans l'alignement du but à une distance l = 35 m. La balle garde une vitesse constante de 130 km/h pendant le vol et sa vitesse de rotation est de 6 tr/s (dans le sens inverse des aiguilles du montre). On néglige les frottements. Sachant que le ballon est tiré avec un angle de $\alpha = 12°$, déterminer si le ballon rentre dans les cages et si oui, à quelle distance D du centre des cages (une cage de foot fait 7,3 m de large) ? *Aide : comme $R \gg l$ on pourra considérer que la longueur de l'arc de la trajectoire du ballon est égale à l.*

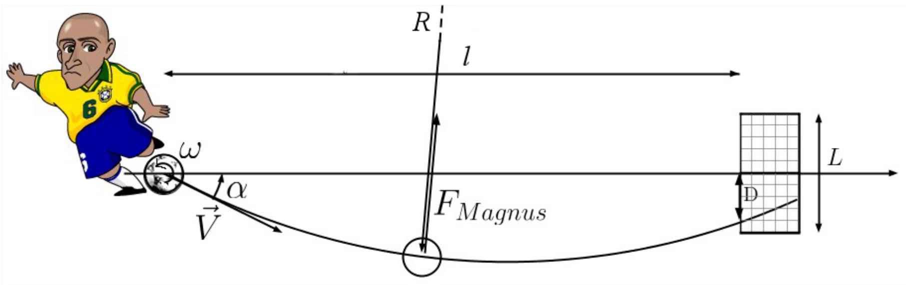

FIGURE 4 – L'effet Magnus et Roberto vu du dessus

Corrections

Exercice 1 On considère que le débit est conservé, la section dans le tuyau reliant A à B étant constante cela donne $v_A = v_B = v$. La pression en B est la pression atmosphérique p_{atm}. La pression en A est $p_A = \rho g h + p_{atm}$. De plus et $z_A = 0$, et $z_B = h_{tot}$. On ecrit maintenant la relation de Bernouilli au point A et au point B.

$$\Psi_A = \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A + p_A = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p_{atm},$$
$$\Psi_B = \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g z_B + p_B = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_{tot} + p_{atm}.$$

Le long d'une ligne de courant Ψ doit se conserver or :

$$\Psi_B - \Psi_A = \rho g (h_{tot} - h).$$

Cela représente l'énergie qu'il faut fournir au système pour égaliser les potentiels et maintenir l'écoulement. Ce terme est l'énergie par unité de volume fournie par la pompe au fluide et est noté e :

$$e = \rho g (h_{tot} - h).$$

Puisque l'on a un débit Q la puissance P à fournir pour maintenir cet apport en energie au flux est :

$$P = Qe = 3924 \text{ W}.$$

Exercice 2 On se place dans le référentiel de la torpille (car il faut se placer dans référentiel tel que l'écoulement est stationnaire pour pouvoir appliquer le théorème de Bernouilli). On considère une ligne de courant horizontale entre le nez de la torpille (point A) et un point très éloigné (non perturbé) en avant de celle-ci (point B). On écrit ensuite la loi de Bernouilli entre ces deux points (on négligera la pression atmosphérique)

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B$$

Avec $z_A = z_B$, $v_A = 0$ m/s, $v_B = -13,89$ m/s (le signe négatif est du au fait qu'on est dans le référenciel de la torpille) et $p_B = \rho g h$ Pa avec $h = 10$ m on obtient

$$p_A = p_B + \varrho\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right) = 194,55 \text{ kPa}.$$

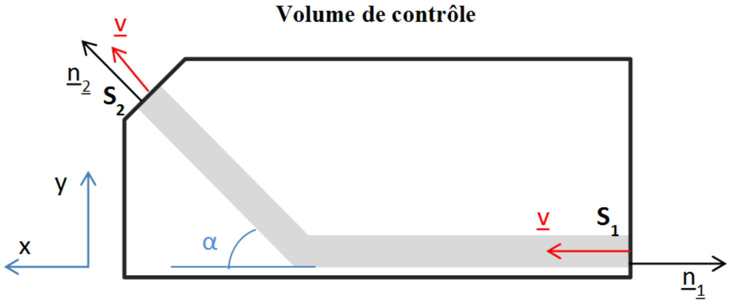

FIGURE 5 – Volume de contrôle

Exercice 3

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

La conservation de masse s'écrit comme $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Étant donné que $S_1 = S_2 = S$ on a donc $v_1 = v_2 = v$. On est en régime stationnaire, donc l'équation d'Euler exprimée avec le théorème de transport dans le volume de contrôle ci-dessus s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\sum \boldsymbol{F}_{ext} &= \int_S \varrho \mathbf{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\ dS \\
&= \int_{S_1} \varrho \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] dS \\
&+ \int_{S_2} \varrho \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\right] dS \\
&= S\varrho \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \end{pmatrix} + S\varrho v^2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les forces externes sont les forces appliquées par le coude sur l'écoulement. Aussi on a $S = \pi R^2$ et $Q = vS$ et donc finalement

$$\boldsymbol{F}_{ext} = \frac{Q^2}{\pi R^2}\varrho \begin{pmatrix} 1 - \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 On se place dans une symétrie radiale pour le jet en considérant qu'après impact l'écoulement a une distribution de vitesses symétrique par rapport à l'axe du jet et nulles dans la direction x. Comme dans l'exercice précédent on écrit l'équation d'Euler :

$$\int_S \rho \boldsymbol{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n})\ dS = \sum \boldsymbol{F}_{ext}$$

avec :

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui donne :

$$\begin{aligned}\int_S \rho \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] dS + \int_S \rho \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] dS \\ = S\rho \begin{pmatrix} -v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \\ = \boldsymbol{F}_{ext}.\end{aligned}$$

Où $S = \pi a^2$ donc

$$\boldsymbol{F}_{int} = -\boldsymbol{F}_{ext} = \pi a^2 \rho \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 On va utiliser le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux extrémités du tuyau. On suppose que la vitesse d'entrée est celle de la rivière, ce qui suppose de se placer ni trop près du tuyau (perturbations de l'écoulement par le tuyau), ni trop loin (dissipation sur le lit de la rivière non prise en compte). Bien sûr l'ensemble est à la pression atmosphérique. On utilise l'indice R pour indiquer la rivière et S pour indiquer le seau.

$$\frac{\rho v_R^2}{2} + \rho g z_R + p_R = \frac{\rho v_S^2}{2} + \rho g z_S + p_S.$$

$z_R = -h_1$, $z_S = h_2$, $p_S = p_{atm}$, $p_R = p_{atm} + \rho g h_1$, et t, le temps à remplir le seau, est lié au débit par $Q = V/t$ où V est la volume du seau, et la section du tuyau, $S_{tuyau} = \pi d^2/4$. Donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho v_R^2}{2} &= \frac{\rho v_S^2}{2} + \rho g h_2 \\
\Rightarrow v_R^2 &= v_S^2 + 2gh_2 \\
&= \left(\frac{Q}{S_{tuyau}}\right)^2 + 2gh_2 \\
&= \left(\frac{V}{td^2\pi/4}\right)^2 + 2gh_2 \\
\Rightarrow v_R &= \sqrt{\left(\frac{4V}{td^2\pi}\right)^2 + 2gh_2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 6

1. Dans le référentiel du terrain, le ballon fait tourner localement l'air autour de lui. $v_{A,t} = \omega * a$ et $v_{B,t} = -\omega * a$. Dans le référentiel du ballon (en translation rectiligne par rapport au terrain, c'est à dire sans rotation), tout se passe comme si l'air est animé de la vitesse du ballon en sens opposé, $v_{A,b} = \omega a - v_{ballon}$ et $v_{B,b} = -\omega a - v_{ballon}$.
2. On se place dans le référenciel du ballon car dans ce dernier l'écoulement est permanant. On va supposer $z_A = z_B$. D'après le théorème de Bernoulli ce qui permet d'écrire

   $$\frac{\rho v_{A,b}^2}{2} + p_A = \frac{\rho v_{B,b}^2}{2} + p_B$$

   d'où

   $$p_A - p_B = \frac{\rho}{2}\left(v_{B,b}^2 - v_{A,b}^2\right) = \frac{\rho}{2}\left((-\omega a - v_{ballon})^2 - (\omega a - v_{ballon})^2\right) = \frac{\rho}{2}(4\omega a v_{ballon}).$$

   $p_A - p_B$ est positif donc la balle va subir une force vers le bas sur le schéma.
3. On intègre la force sur la surface de la sphère et on trouve que la force exercé est la différence de pression fois l'aire du disque :

   $$\| \boldsymbol{F_{Magnus}} \| = F_{Magnus} = (p_A - p_B)\pi a^2 = 2\pi\rho\omega a^3 v_{ballon}.$$

4. On égalise la force centrifuge $F_c = mR\omega^2 = mv_{ballon}^2/R$ avec la force de Magnus F_{Magnus} et on trouve l'expression du rayon :

$$R = \frac{mv}{2\pi\rho\omega a^3}$$

5. Nous avons maintenant l'ensemble des données nécessaires pour trouver la distance D. Il faut pour cela faire un peu de trigonométrie. Sur la figure, ci-dessous, on a tracé la courbe de la trajectoire de rayon R, dont la tangente en C fait un angle α avec AC. On trouve le point B en traçant la perpendiculaire à AC, passant par A et coupant l'arc, le point B correspond au point où la balle quitte le terrain. Le triangle OBC est isocèle donc on a la relation

$$\beta + 2\gamma = \pi.$$

On observe que l'angle $\eta = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}$. Le triangle ABC est rectangle donc

$$\tan \eta = D/l.$$

Donc

$$D = l \tan(\alpha - \beta/2).$$

Il faut encore déduire l'angle β, on utilise pour cela l'approximation des petits angles on disant que l est approximativement égal à l'arc entre B et C. Ainsi

$$\beta = \frac{l}{R}.$$

D'où

$$D = l \tan(\alpha - \frac{l}{2R}).$$

Application numérique : $D = 3,6$ m donc le ballon rentre bien dans les cages puisque elles font 7,3 m de large.

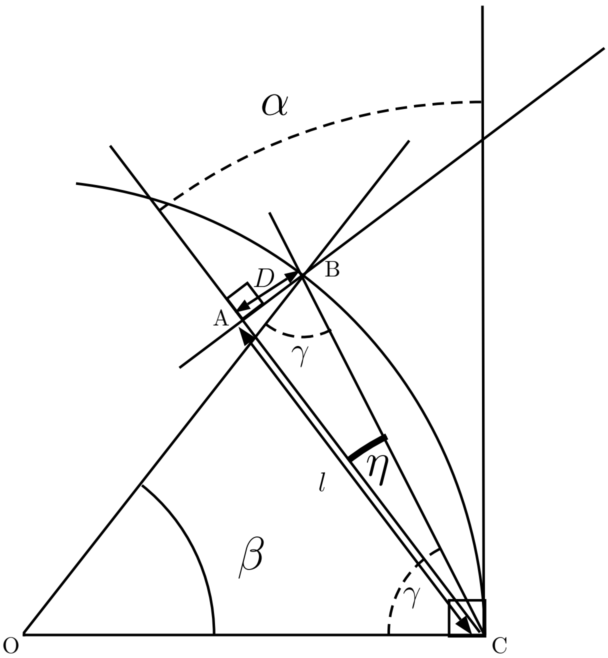

Figure 6 – Resolution trigonométrique